

Mellin 変換を用いた，画像の拡大・縮小率を求める数値実験について

守本晃（大阪教育大学）

2019年12月5日

1 Mellin 変換

$\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$ で定義された（急減少）関数 $f(t)$ の Mellin 変換を，

$$\mathcal{M}f(\omega) = \int_0^\infty f(t) t^\omega dt \quad (1)$$

で定義する．ただし， $\omega \in \mathbb{R}_+$ とする．

ω を非負の整数 n に取れば，Mellin 変換は， n 次モーメントを求めていることになる．全ての次数のモーメントが分かれば，元の関数が構成できるとかいう「モーメント母関数」があるので母関数について説明する．

逆変換は，複素領域で， $\mathcal{M}f(\omega)$ の極を全て囲む単純閉曲線 C で，線積分

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \mathcal{M}f(\omega) t^{-\omega} d\omega$$

を計算することで得られる．逆ラプラス変換と似たような感じ．

1.1 Mellin 変換についての注意

Mellin 変換の定義式 (1) は，フランス人 Roger Godement の書いた Springer の教科書 “Analysis III” [1] での定義を採用した．工学系の多くの応用では，この定義を使っている．

Wolfram MathWorld [2] や Wikipedia [3] では，Mellin 変換の定義として，

$$\begin{aligned} \mathcal{M}f(s) = \varphi(s) &= \int_0^\infty f(t) t^{s-1} dt, \\ \mathcal{M}^{-1}\varphi(t) = f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \varphi(s) t^{-s} ds \end{aligned}$$

を採用している。逆変換は、複素平面上実部が c の直線で区切られた左半平面に $\varphi(s)$ の極が全て入るようにし、 $\varphi(s)$ の極での $\varphi(s)t^{-s}$ の留数を全て足し合わせろということ。

我々の採用した Mellin 変換は、両側ラプラス変換

$$\mathcal{B}[f(t)](s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

において、 $\eta = e^{-t}$ と変数変換すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{B}[f(e^{-t})](s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-t}) e^{-st} dt \\ &= \int_{\infty}^0 f(\eta) (e^{-t})^s \left(-\frac{1}{e^{-t}} d\eta\right) \\ &= \int_0^{\infty} f(\eta) \eta^{s-1} d\eta \\ &= \mathcal{M}[f](s-1) \end{aligned}$$

になる。ただし、 $\eta = e^{-t}$ と変数変換すると、 $t: -\infty \rightarrow \infty$ は $\eta: \infty \rightarrow 0$ で、 $d\eta = -e^{-t} dt$ であることを使った。

一方、Wolfram の定義では、 $\mathcal{B}[f(e^{-t})](s) = \mathcal{M}[f](s)$ である。 $\mathcal{M}[e^{-t}](s)$ がガンマ関数になる。

2 母関数

数列 $\{a_n\}$ に対して、関数列 $\{e_n(t)\}$ の重み付き和

$$f(t) = \sum_n a_n e_n(t)$$

を母関数とよぶ。母関数 (generating function) とは、数列から生成される関数という意味であり、テーラー展開、三角級数展開、 z -変換 (ローラン展開) なども母関数である。

2.1 テーラー展開

数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\dots}$ に対して、関数列として n 次単項式 t^n で和を取ると、母関数

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \tag{2}$$

を得る。このとき、両辺を n 階微分して、 $t = 0$ を代入することにより、

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (3)$$

である。

逆に無限階連続微分できる関数 $f(t)$ に対して、係数を式 (3) で与え和 (2) を考えたとき、条件が良ければ元の関数に戻ることが分かっている（テーラーの定理）。

2.2 三角級数展開

関数列として、 $\{e^{2\pi int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を考えた場合が三角級数展開に相当する。数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ に対して、和

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi int} \quad (4)$$

を考えると母関数になる。 $f(t)$ は周期 1 の周期関数になる。区間 $[0, 1)$ で関数列 $\{e^{2\pi int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が正規直交するので、数列 a_n は、

$$a_n = \int_0^1 f(t) \overline{e^{2\pi int}} dt = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi int} dt \quad (5)$$

で計算できる。三角級数展開は、Fourier が 1807 年に熱伝導方程式を解くときに使った方法である。周期 1 の周期関数 $f(t)$ に対して、係数を式 (5) で定め、母関数 (4) を考えたときに、元に戻るかは、重要な問題であり、盛んに研究されている。1904 年にルベグ積分が発表されて、 $L^2([0, 1))$ に入る関数なら元に戻ることが分かった。ちなみに、1845 年のリーマン積分を提案した論文のタイトルも、“Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe”（三角級数による関数の表現可能性に関して）であった。

2.3 モーメント母関数

モーメント母関数（積率母関数）については、 $f(t)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

の e^{-st} に 0 の周りのテーラー展開

$$e^{-st} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-st)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} (t)^n$$

を代入して，和と積分の順序を変えると，

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} (t)^n \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(t) t^n dt \right] \frac{(-s)^n}{n!}$$

になり， n 次モーメントを $\frac{(-s)^n}{n!}$ で足し合わせる母関数である．この母関数を逆ラプラス変換すれば， $f(t)$ が再構成される．

3 スケール変換と Mellin 変換

スケール変換 $f_{\alpha}(t) = f(\alpha t)$ の Mellin 変換は，

$$\begin{aligned} \mathcal{M}f_{\alpha}(\omega) &= \int_0^{\infty} f(\alpha t) t^{\omega} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(y) \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\omega} \frac{dy}{\alpha} \\ &= \alpha^{-(\omega+1)} \mathcal{M}f(\omega) \end{aligned}$$

である．これらの式から α を計算するには，

$$\alpha^{\omega+1} = \frac{\mathcal{M}f(\omega)}{\mathcal{M}f_{\alpha}(\omega)} \implies \alpha = \left(\frac{\mathcal{M}f(\omega)}{\mathcal{M}f_{\alpha}(\omega)} \right)^{1/(\omega+1)}$$

図 1 では，一周期の $\sin(t)$ と $\sin(\alpha t)$, $\alpha = 0.7$. 時間幅 0.2 でサンプリングして，Mellin 変換を計算し， α を横軸 ω で描いた推定した．

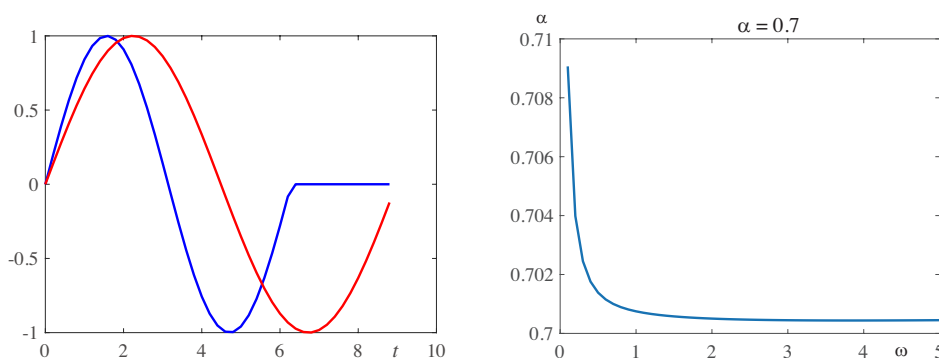


図 1: 青 : $\sin(t)$ 一周期，赤 : $\sin(\alpha t)$, $\alpha = 0.7$ 一周期．時間幅 0.2. 右 : α の推定．

原点の位置 $t = 0$ が非常に重要で，ここがずれると全く歯が立たない．図 2 参照．

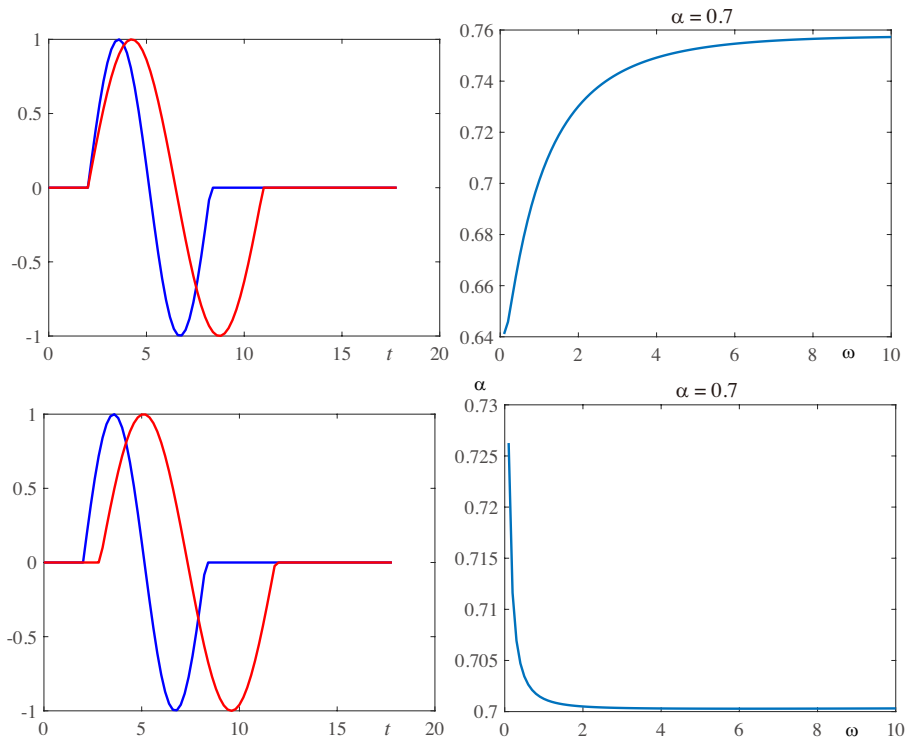


図 2: 上: $\alpha = 0.7$ で原点がずれているとき. 下: 原点が一致しているとき.

4 フーリエ空間で Mellin 作用素

実空間での平行移動は、フーリエ変換すると、変調に変わる. フーリエ変換の絶対値を取ると、変調部分は大きさ 1 なので考える必要がなくなる. そこで、フーリエ像の絶対値にたいして、Mellin 変換を考えると、実空間での平行移動の効果を打ち消せる. $f(t)$ と $f_\alpha(t) = f(\alpha t)$ のフーリエ変換は、それぞれ

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} dt$$

$$\hat{f}_\alpha(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(\alpha t) e^{-i\xi t} dt = \int_{\mathbb{R}} f(s) e^{-i\xi s/\alpha} \frac{dt}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$$

である。フーリエ像の絶対値の Mellin 変換を考えよう。ただし、パラメータ $p > 0$ を追加するので、Mellin 作用素である。

$$\begin{aligned}\mathcal{M}|\widehat{f}|(p, \omega) &= \int_0^\infty |\widehat{f}(\xi)|^p \xi^\omega d\xi \\ \mathcal{M}|\widehat{f}_\alpha|(p, \omega) &= \int_0^\infty \left| \frac{1}{\alpha} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \right|^p \xi^\omega d\xi \\ &= \frac{1}{\alpha^p} \int_0^\infty |\widehat{f}(\eta)|^p (\alpha\eta)^\omega \alpha d\eta \\ &= \alpha^{\omega+1-p} \mathcal{M}|\widehat{f}|(p, \omega)\end{aligned}$$

よって、 α を求めると、

$$\alpha^{\omega+1-p} = \frac{\mathcal{M}|\widehat{f}_\alpha|(p, \omega)}{\mathcal{M}|\widehat{f}|(p, \omega)} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \left(\frac{\mathcal{M}|\widehat{f}_\alpha|(p, \omega)}{\mathcal{M}|\widehat{f}|(p, \omega)} \right)^{\frac{1}{\omega+1-p}}.$$

4.1 α の推定例と数値計算上の注意

4.1.1 信号とそのフーリエ変換

・ 信号については、図 3 左の 2 周期分の正弦波を考える。青が元の信号で、区間 $[0, 2\pi]$ 内に $\sin(2\pi t)$ 2 周期分を少しずらしてはめ込んで、 $\Delta_1 = 0.01$ 間隔でサンプリングした信号である。一方、赤信号は $\alpha = 1.3$ とした $\sin(2\pi\alpha t)$ 2 周期分を少しずらして区間 $[0, 3\pi]$ にはめ込んで、 $\Delta_2 = 0.007$ 間隔でサンプリングした信号である。fft を使ってフーリエ変換するとき、奇数長と偶数長で目盛りの扱いが異なるから、奇数長データは最後に 0 の要素を加えて各データ列は偶数長になるようにする。

・ フーリエ変換を計算するには、データの fft にサンプリング間隔をかければ、中点則を用いた数値積分になる。ただし、Matlab なら fftshift で直流成分を真ん中にする必要がある。このとき、青信号の角周波数軸は、

- 最低角周波数： $-\pi/\Delta_1$
- 角周波数刻み： $2\pi/\Delta_1$ /青信号のデータ長
- 最高角周波数： $\pi/\Delta_1 - \text{周波数刻み}$
- 角周波数軸：最低角周波数から最高角周波数までを角周波数刻みで

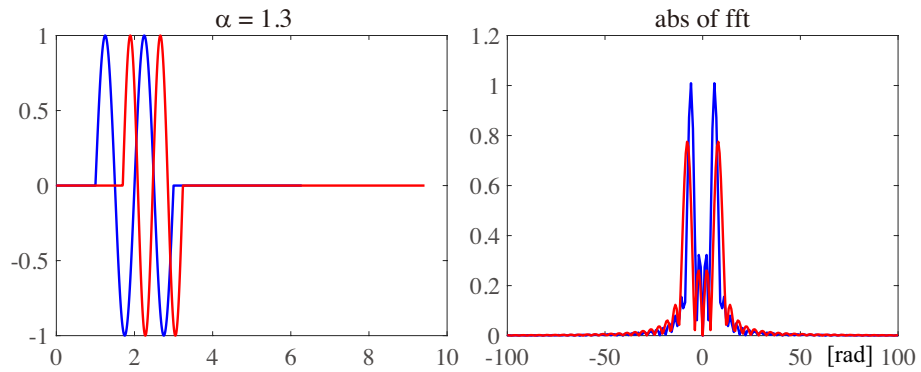


図 3: 左: 青元信号, 赤: $\alpha = 1.3$ で原点がずれている信号. 右: それぞれのフーリエ変換の絶対値 (ただし周波数軸を $[-100, 100]$ [rad] で切った).

である. それぞれのフーリエ変換の絶対値を描くと図 3 右になる.

フーリエ変換の絶対値を p 乗し, α を推定すると, 図 4 および図 5 になる. $p = 3$ 以上にとると, $\alpha = 1.3$ と推定できる. ただし, $\omega = p - 1$ のところで, ゼロ割になり計算できない.

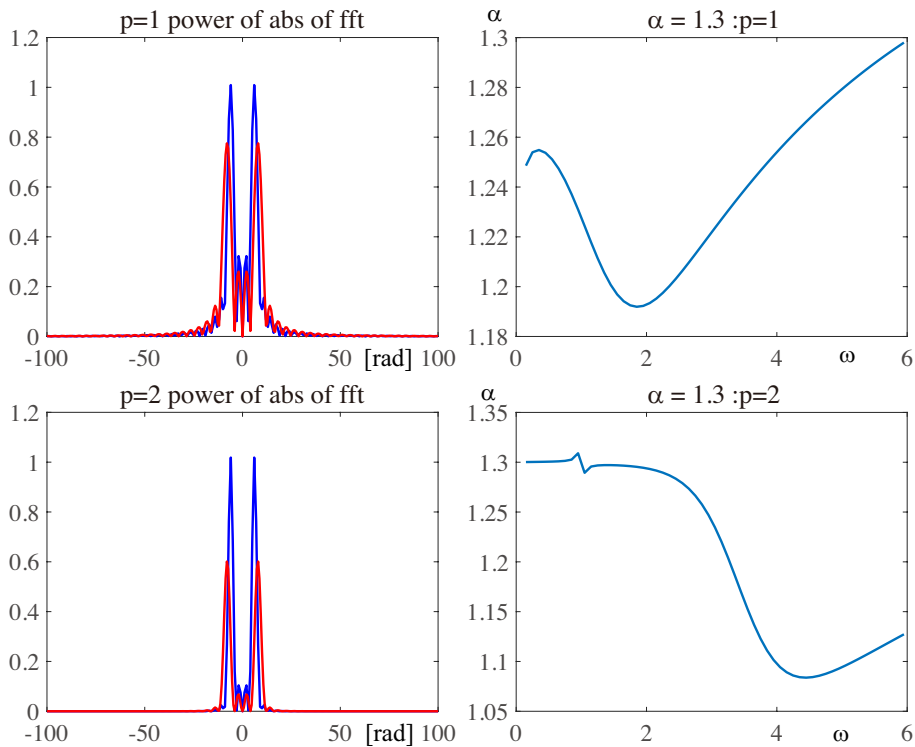


図 4: 左: フーリエ変換の絶対値の $p = 1, 2$ 乗. 右: $\alpha = 1.3$ の推定 (横軸 ω).

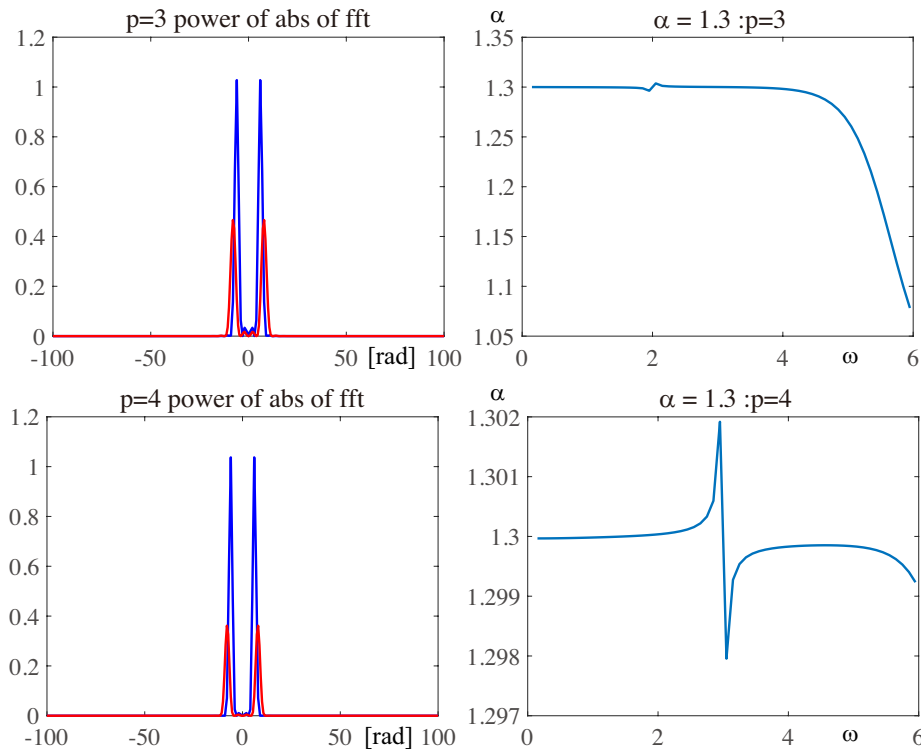


図 5: 左：フーリエ変換の絶対値の $p = 3, 4$ 乗. 右： $\alpha = 1.3$ の推定（横軸 ω ）.

5 2次元関数に対する Mellin 変換・作用素

Mellin 変換は、1次元の区間 $[0, \infty)$ で定義された関数に対する変換であるから、2次元の関数・画像に対しては、 (r, θ) で極座標表示し、各 θ ごとに動径 r 方向に Mellin 変換を行う。

ここでは、Mellin 変換を原点からの距離 t の ω 乗に関数値 $f(t)$ をかけた積分と考えて、そのまま2次元に拡張した Mellin 作用素も定義する。

5.1 画像の極座標表示を用いた Mellin 変換

画像の左上を原点として、図 6 左のように極座標 (r, θ) を入れる。 θ の範囲は $0 \leq \theta \leq 90$ 度である。

図 7 左のバーバラさんの一部とそれを $\alpha = 0.73$ 倍に縮小した中図で θ を 0 度から 90 度まで、0.5 度刻みで、 ω を 1 から 10 まで 0.1 刻みで動かして α の値を計算すると図 8 左を得る。縦方向が θ で上側が 0 度、下側が 90 度である。横方向が ω で左端が $\omega = 1$ 、右端が $\omega = 10$ である。カラーバーから α の値は、0.71 から 0.74 の間であることが分かる。図 8 右には、左図の α の値の分布状態をヒストグラムとして表示した。

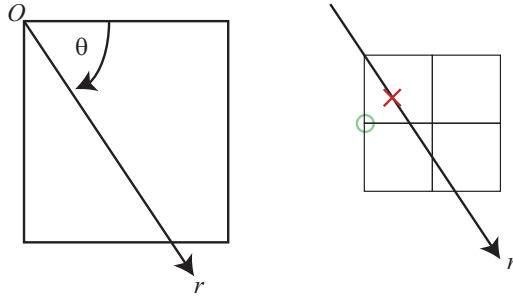


図 6: 左: 画像の極座標表示. 右: 極座標表示された (r, θ) の位置 \times に一番近い画素 \circ の輝度を関数値とする.

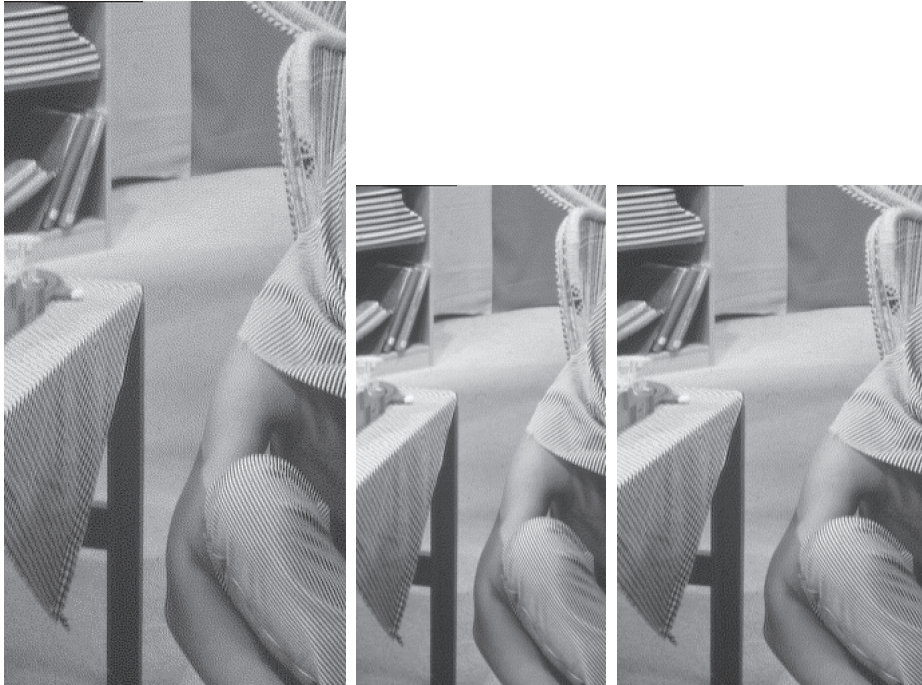


図 7: 左: バーバラさんの一部. 中: その 0.73 倍. 右: 縦方向 0.73 倍, 横方向 0.91 倍.

つぎに, 図 7 右図のバーバラさんの一部を縦方向に $\alpha_1 = 0.73$ 倍, 横方向に $\alpha_2 = 0.91$ 倍した画像に対して, α を計算する. 計算結果を図 9 に示す.

5.2 2次元 Mellin 作用素 その1

\mathbb{R}^2 で定義された関数 $f(x_1, x_2)$ に対して, Mellin 作用素を

$$\mathcal{M}f(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) (x_1^2 + x_2^2)^{\omega/2} dx_1 dx_2$$

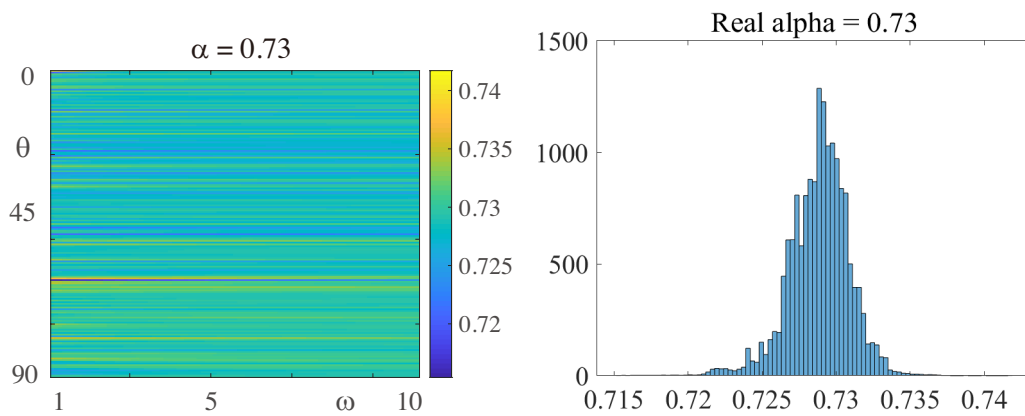


図 8: バーバラさんの一部とその 0.73 倍を Mellin 変換する. 左: α を角度 θ , ω に対して計算した図. 右: 左図の α の分布状態.

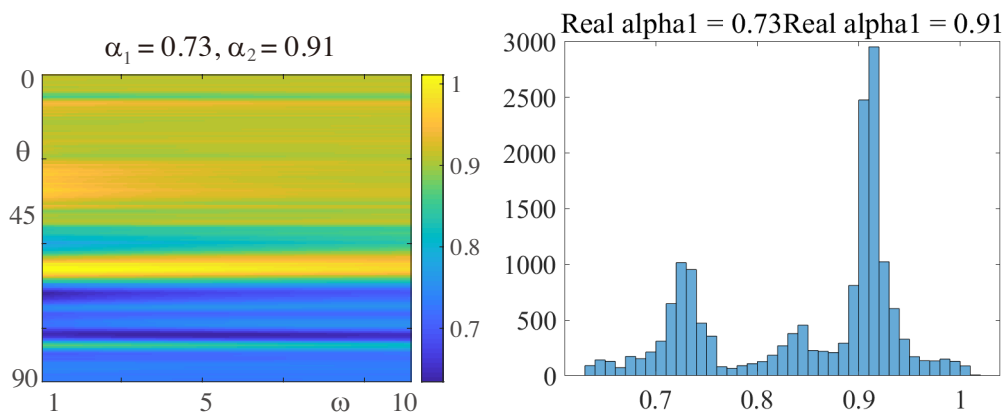


図 9: バーバラさんの一部とその縦 0.73 倍, 横 0.91 倍を Mellin 変換する. 左: α を角度 θ , ω に対して計算した図. 右: 左図の α の分布状態. 縦方向の $\alpha_1 = 0.73$ 倍と横方向の $\alpha_2 = 0.91$ 倍が現れる.

で定義すると, スケール変換 $f_\alpha(x_1, x_2) = f(\alpha x_1, \alpha x_2)$ に対しては,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}f_\alpha(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(\alpha x_1, \alpha x_2) (x_1^2 + x_2^2)^{\omega/2} dx_1 dx_2 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} f(y_1, y_2) \left(\frac{y_1^2 + y_2^2}{\alpha^2} \right)^{\omega/2} \frac{dy_1}{\alpha} \frac{dy_2}{\alpha} \\
 &= \alpha^{-(\omega+2)} \mathcal{M}f(\omega)
 \end{aligned}$$

の関係が成立する。したがって、 α を求めると、

$$\alpha^{\omega+2} = \frac{\mathcal{M}f(\omega)}{\mathcal{M}f_\alpha(\omega)} \implies \alpha = \left(\frac{\mathcal{M}f(\omega)}{\mathcal{M}f_\alpha(\omega)} \right)^{\frac{1}{\omega+2}}$$

である。この方法で、図 7 左と中のバーバラさんの一部とその 0.73 倍に対して、 α を推定すると、図 10 であり、1 から 15 までの ω に対して、 $\alpha = 0.73$ で一定なことが分かる。

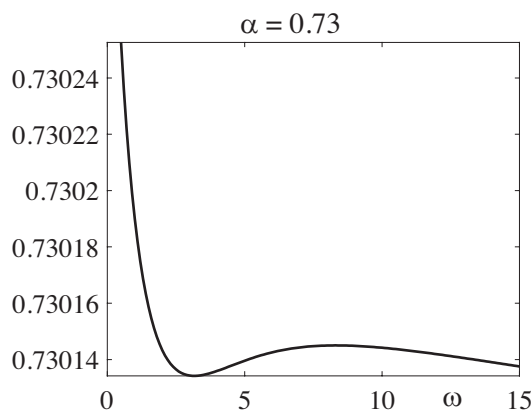


図 10: バーバラさんの一部とその 0.73 倍を Mellin 作用素を用いて α を計算する。横軸 ω に対して、ほぼ $\alpha = 0.73$ で一定であることが分かる。

5.3 2次元 Mellin 作用素 その2

\mathbb{R}^2 で定義された関数 $f(x_1, x_2)$ に対して、Mellin 作用素を

$$\mathcal{M}_2 f(\omega_1, \omega_2) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) |x_1|^{\omega_1} |x_2|^{\omega_2} dx_1 dx_2$$

で定義する。スケール $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}_+$ をとり、スケール変換 $f_\alpha(x_1, x_2) = f(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2)$ に対しては、

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 f_\alpha(\omega_1, \omega_2) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2) |x_1|^{\omega_1} |x_2|^{\omega_2} dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(y_1, y_2) \left| \frac{y_1}{\alpha_1} \right|^{\omega_1} \left| \frac{y_2}{\alpha_2} \right|^{\omega_2} \frac{dy_1}{\alpha_1} \frac{dy_2}{\alpha_2} \\ &= \alpha_1^{-(\omega_1+1)} \alpha_2^{-(\omega_2+1)} \mathcal{M}_2 f(\omega_1, \omega_2) \end{aligned}$$

の関係が成立する。したがって、比を

$$\mathcal{R}_\alpha(\omega_1, \omega_2) = \frac{\mathcal{M}_2 f(\omega_1, \omega_2)}{\mathcal{M}_2 f_\alpha(\omega_1, \omega_2)} = \alpha_1^{(\omega_1+1)} \alpha_2^{(\omega_2+1)}$$

とする．両辺の対数を取ると

$$\log(\mathcal{R}_\alpha(\omega_1, \omega_2)) = (\omega_1 + 1) \log(\alpha_1) + (\omega_2 + 1) \log(\alpha_2) \quad (6)$$

と ω_1, ω_2 の平面の方程式である．図 7 右のバーバラさんの一部を縦方向 0.73 倍，横方向 0.91 倍した画像なので， $\alpha_1 = 1/0.73 = 1.37$ ， $\log(\alpha_1) = 0.315$ ， $\alpha_2 = 1/0.91 = 1.10$ ， $\log(\alpha_2) = 0.0943$ である．このとき， $\log(\mathcal{R}_\alpha(\omega_1, \omega_2))$ を描くと，図 11 であり，平面になることがわかる．

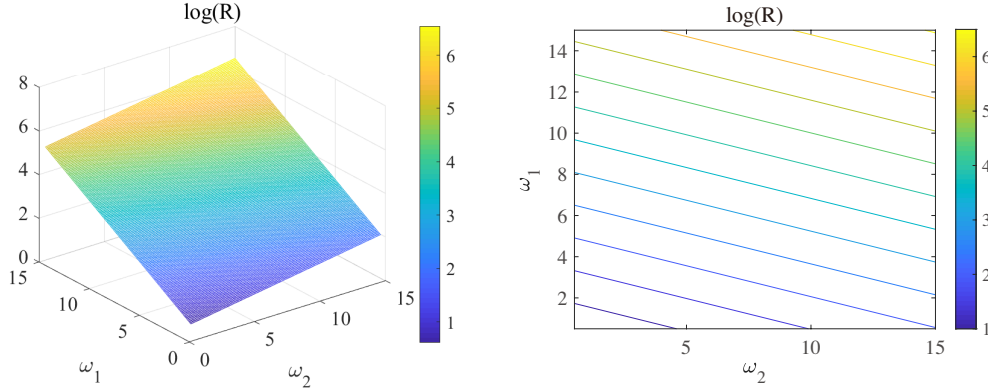


図 11: $\log(\mathcal{R}_\alpha(\omega_1, \omega_2))$ の 3D プロットと等高線．どちらも平面であることを示している．

さて，式 (6) のパラメータ $\beta_1 = \log(\alpha_1)$ ， $\beta_2 = \log(\alpha_2)$ を最小二乗法で推定しよう． n 番目のデータ $\omega^n = (\omega_1^n, \omega_2^n)$ に対して，二乗誤差の総和

$$E(\beta_1, \beta_2) = \sum_n [\beta_1(\omega_1^n + 1) + \beta_2(\omega_2^n + 1) - \log(\mathcal{R}_\alpha(\omega_1^n, \omega_2^n))]^2 \quad (7)$$

に対して，停留点 (β_1 偏微分と β_2 偏微分が同時に 0 になる点) を求める．すなわち，

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial \beta_1} = 2 \sum_n (\omega_1^n + 1) [\beta_1(\omega_1^n + 1) + \beta_2(\omega_2^n + 1) - \log(\mathcal{R}_\alpha(\omega_1^n, \omega_2^n))] = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial \beta_2} = 2 \sum_n (\omega_2^n + 1) [\beta_1(\omega_1^n + 1) + \beta_2(\omega_2^n + 1) - \log(\mathcal{R}_\alpha(\omega_1^n, \omega_2^n))] = 0 \end{cases}$$

という， β_1, β_2 変数の連立一次方程式を解けば良い．整頓すると，

$$\begin{cases} \left[\sum_n (\omega_1^n + 1)^2 \right] \beta_1 + \left[\sum_n (\omega_1^n + 1)(\omega_2^n + 1) \right] \beta_2 = \sum_n (\omega_1^n + 1) \log(\mathcal{R}_\alpha(\omega_1^n, \omega_2^n)), \\ \left[\sum_n (\omega_1^n + 1)(\omega_2^n + 1) \right] \beta_1 + \left[\sum_n (\omega_2^n + 1)^2 \right] \beta_2 = \sum_n (\omega_2^n + 1) \log(\mathcal{R}_\alpha(\omega_1^n, \omega_2^n)). \end{cases}$$

これを解くと,

$$\beta = \begin{pmatrix} 0.3041 \\ 0.1027 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = e^\beta = \begin{pmatrix} 1.36 \\ 1.11 \end{pmatrix} \Rightarrow 1./\alpha = \begin{pmatrix} 0.738 \\ 0.902 \end{pmatrix}$$

と実際の拡大・縮小比に近い値が出る.

6 2次元フーリエスペクトルの Mellin 作用素

2変数関数 $f(x_1, x_2)$ のフーリエ変換を

$$\widehat{f}(\xi_1, \xi_2) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) e^{-i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)} dx_1 dx_2$$

で定義すると, スケール変換 $f_\alpha(x_1, x_2) = f(\alpha x_1, \alpha x_2)$ のフーリエ変換は, $y_1 = \alpha x_1$, $y_2 = \alpha x_2$ と変数変換すると, $dy_1 dy_2 = \alpha^2 dx_1 dx_2$ なので,

$$\begin{aligned} \widehat{f}_\alpha(\xi_1, \xi_2) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(\alpha x_1, \alpha x_2) e^{-i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)} dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(y_1, y_2) e^{-i(y_1\xi_1 + y_2\xi_2)/\alpha} \frac{dy_1 dy_2}{\alpha^2} \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \widehat{f}\left(\frac{\xi_1}{\alpha}, \frac{\xi_2}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

である. 絶対値を取って, $|\widehat{f}(\xi_1, \xi_2)|$ と $|\widehat{f}_\alpha(\xi_1, \xi_2)|$ の $p > 0$ 乗の Mellin 作用素を考えると,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}|\widehat{f}|(p, \omega) &= \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f}(\xi_1, \xi_2)|^p (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{\omega/2} d\xi_1 d\xi_2 \\ \mathcal{M}|\widehat{f}_\alpha|(p, \omega) &= \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f}_\alpha(\xi_1, \xi_2)|^p (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{\omega/2} d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{1}{\alpha^2} \widehat{f}\left(\frac{\xi_1}{\alpha}, \frac{\xi_2}{\alpha}\right) \right|^p (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{\omega/2} d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\alpha^{2p}} |\widehat{f}(\eta_1, \eta_2)|^p (\alpha^2 \eta_1^2 + \alpha^2 \eta_2^2)^{\omega/2} \alpha^2 d\eta_1 d\eta_2 \\ &= \alpha^{\omega+2-2p} \mathcal{M}|\widehat{f}|(p, \omega) \end{aligned}$$

ただし, $\eta_1 = \xi_1/\alpha$, $\eta_2 = \xi_2/\alpha$, $d\eta_1 d\eta_2 = d\xi_1 d\xi_2/\alpha^2$ とおき変えた. 従って, α を求めるためには, $\mathcal{M}|\widehat{f}|(p, \omega)$ と $\mathcal{M}|\widehat{f}_\alpha|(p, \omega)$ の商を取って,

$$\alpha^{\omega+2-2p} = \frac{\mathcal{M}|\widehat{f}_\alpha|(p, \omega)}{\mathcal{M}|\widehat{f}|(p, \omega)} \implies \alpha = \left(\frac{\mathcal{M}|\widehat{f}_\alpha|(p, \omega)}{\mathcal{M}|\widehat{f}|(p, \omega)} \right)^{\frac{1}{\omega+2-2p}}$$

で求まる.

謝辞

本研究は, 大阪教育大学と AIMaP と科研費 (C) 17K05363 の補助を受けている.

参考文献

- [1] R. Godement, Analysis III, Analytic and Differential Functions, Manifolds and Riemann Surfaces, Springer, 2015.
- [2] Wolfram MathWorld の Mellin Transform のページ <http://mathworld.wolfram.com/MellinTransform.html> : 2019年12月5日.
- [3] Wikipedia の Mellin transform のページ https://en.wikipedia.org/wiki/Mellin_transform : 2019年12月5日.